Coordinate polari

Consideriamo la funzione

$$\Phi : (0, +\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \ , \qquad \Phi(r, \theta) = \big(r \cos\theta\ ,\ r \sin\theta\big).$$

La mappa Φ è di classe C^∞ su $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$ e la matrice jacobiana, calcolata in un punto (r, θ) è

$$J\Phi(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Data una funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di classe C^1, consideriamo la funzione composta

$$F \circ \Phi : (0, +\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ , \qquad (F \circ \Phi)(r, \theta) = F\big(r\cos\theta\ ,\ r\sin\theta\big).$$

Per il teorema della derivata di una funzione composta, abbiamo

$$\Big(\partial_r(F \circ \Phi), \partial_\theta(F \circ \Phi)\Big) = \big(\partial_x F(\Phi), \partial_y F(\Phi)\big) \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix},$$

where both Φ and $\nabla(F \circ \Phi)$ are calculated at (r, θ). In particular, we get

$$\begin{cases} \partial_r(F \circ \Phi) = \cos\theta\, \partial_x F(\Phi) + \sin\theta\, \partial_y F(\Phi) \\ \partial_\theta(F \circ \Phi) = -r\sin\theta\, \partial_x F(\Phi) + r\cos\theta\, \partial_y F(\Phi), \end{cases}$$

or equivalently

$$\begin{cases} \partial_r(F \circ \Phi) = (\cos\theta, \sin\theta) \cdot \nabla F(\Phi) \\ \partial_\theta(F \circ \Phi) = r(-\sin\theta, \cos\theta) \cdot \nabla F(\Phi). \end{cases}$$

In particolare, abbiamo la formula

Norma del gradiente in coordinate polari

$$|\nabla F|^2 \circ \Phi = \Big(\partial_r(F \circ \Phi)\Big)^2 + \frac{1}{r^2}\Big(\partial_\theta(F \circ \Phi)\Big)^2.$$

Osserviamo ora che l'inversa della matrice $J\Phi$ è data da

$$(J\Phi)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\frac{1}{r}\sin\theta & \frac{1}{r}\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Di conseguenza,

$$\Big(\partial_r(F \circ \Phi), \partial_\theta(F \circ \Phi)\Big) \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\frac{1}{r}\sin\theta & \frac{1}{r}\cos\theta \end{pmatrix} = \big(\partial_x F(\Phi), \partial_y F(\Phi)\big),$$

che possiamo scrivere anche come

Gradiente in coordinate polari

$$\begin{cases} \partial_x F(\Phi) = \cos\theta\, \partial_r(F \circ \Phi) - \dfrac{\sin\theta}{r}\, \partial_\theta(F \circ \Phi) \\[2mm] \partial_y F(\Phi) = \sin\theta\, \partial_r(F \circ \Phi) + \dfrac{\cos\theta}{r}\, \partial_\theta(F \circ \Phi). \end{cases}$$

Come conseguenza, abbiamo

$$\begin{aligned}(\Delta F)\circ\Phi = \partial_{xx}F(\Phi)+\partial_{yy}F(\Phi) &= \cos\theta\,\partial_r\Big(\partial_x F\circ\Phi\Big)-\frac{\sin\theta}{r}\,\partial_\theta\Big(\partial_x F\circ\Phi\Big)\\
&\quad+\sin\theta\,\partial_r\Big(\partial_y F\circ\Phi\Big)+\frac{\cos\theta}{r}\,\partial_\theta\Big(\partial_y F\circ\Phi\Big)\\
&=\cos\theta\,\partial_r\Big(\cos\theta\,\partial_r(F\circ\Phi)-\frac{\sin\theta}{r}\,\partial_\theta(F\circ\Phi)\Big)\\
&\quad-\frac{\sin\theta}{r}\,\partial_\theta\Big(\cos\theta\,\partial_r(F\circ\Phi)-\frac{\sin\theta}{r}\,\partial_\theta(F\circ\Phi)\Big)\\
&\quad+\sin\theta\,\partial_r\Big(\sin\theta\,\partial_r(F\circ\Phi)+\frac{\cos\theta}{r}\,\partial_\theta(F\circ\Phi)\Big)\\
&\quad+\frac{\cos\theta}{r}\,\partial_\theta\Big(\sin\theta\,\partial_r(F\circ\Phi)+\frac{\cos\theta}{r}\,\partial_\theta(F\circ\Phi)\Big),\end{aligned}$$

e quindi otteniamo la formula seguente

Laplaciano in coordinate polari

$$(\Delta F)\circ\Phi=\partial_{rr}(F\circ\Phi)+\frac{1}{r}\partial_r(F\circ\Phi)+\frac{1}{r^2}\partial_{\theta\theta}(F\circ\Phi).$$

Esercizio 1. *Mostrare che la funzione* $F(x,y)=\ln\big(\sqrt{x^2+y^2}\big)$ *è armonica in* $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

Esercizio 2. *Sia* $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *una funzione omogenea, di classe* C^2 *e armonica su* $\mathbb{R}^2$. *Mostrare che la funzione* $F\circ\Phi$ *è della forma*

$$F\big(r\cos\theta,r\sin\theta\big)=r^n\big(a\cos(n\theta)+b\sin(n\theta)\big).$$

Dedurre che F *è un polinomio.*

Osservazione 3. *La mappa*

$$\Phi:(0,+\infty)\times(0,2\pi)\to\mathbb{R}^2\setminus\big\{(t,0)\,:\,t\ge 0\big\}\ ,\qquad \Phi(r,\theta)=\big(r\cos\theta\,,\ r\sin\theta\big),$$

è un diffeomorfismo tra

$$(0,+\infty)\times(0,2\pi)\qquad e\qquad \mathbb{R}^2\setminus\big\{(t,0)\,:\,t\ge 0\big\}.$$

In particolare, ad ogni funzione F *definita su* $\mathbb{R}^2$ $\Big($ *oppure su* $\mathbb{R}^2\setminus\big\{(t,0)\,:\,t\ge 0\big\}\Big)$ *possiamo associare una funzione definita su* $(0,+\infty)\times(0,2\pi)$.

Viceversa, per ogni funzione

$$G:(0,+\infty)\times(0,2\pi)\to\mathbb{R},$$

esiste una funzione

$$F:\mathbb{R}^2\setminus\big\{(t,0)\,:\,t\ge 0\big\}\to\mathbb{R},$$

tale che $G=F\circ\Phi$, *ovvero*

$$G(r,\theta)=F(r\cos\theta,r\sin\theta).$$

Inoltre, F *è regolare quanto* G: *se* G *è continua, allora lo è anche* F; *se* G *è* C^1, *allora lo è anche* F; *se* G *è* C^2, *allora lo è anche* F.

Osservazione 4. *Se la funzione*

$$G:(0,+\infty)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R},$$

è 2π*-periodica nella seconda variabile, ovvero*

$$G(r,\theta+2\pi)=G(r,\theta)\quad \text{per ogni}\quad r>0\quad \text{ed ogni}\quad \theta\in\mathbb{R},$$

allora esiste una funzione $F:\mathbb{R}^2\setminus\big\{(0,0)\big\}\to\mathbb{R}$, *tale che* $G=F\circ\Phi$, *ovvero*

$$G(r,\theta)=F(r\cos\theta,r\sin\theta).$$

Inoltre, F *è regolare quanto* G.

Equazioni differenziali ordinarie in coordinate polari

Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x' = F(x,y) \\ y' = G(x,y) \end{cases}$$

dove F e G sono funzioni a valori reali definite su $\mathbb{R}^2$ (oppure su un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^2$). Consideriamo le funzioni

$$F \circ \Phi : (0,+\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad G \circ \Phi : (0,+\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Supponiamo che la funzione

$$(x,y) : [0,T) \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0)\,:\, x \geq 0\}$$

sia soluzione del problema

$$\begin{cases} x'(t) = F\big(x(t),y(t)\big) \\ y'(t) = G\big(x(t),y(t)\big) \\ x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}.$$

Siccome $(0,+\infty) \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0)\,:\, x \geq 0\}$ sono diffeomorfi, esistono due funzioni

$$r : [0,T) \to (0,+\infty) \qquad \text{e} \qquad \theta : [0,T) \to (0,2\pi),$$

tali che

$$x(t) = r(t)\cos\big(\theta(t)\big) \qquad \text{e} \qquad y(t) = r(t)\sin\big(\theta(t)\big).$$

Allora, abbiamo

$$\begin{cases} r'\cos\theta - r\theta'\sin\theta = F(r\cos\theta, r\sin\theta) \\ r'\sin\theta + r\theta'\cos\theta = G(r\cos\theta, r\sin\theta) \end{cases}$$

e di conseguenza

$$\begin{cases} r' = \cos\theta\, F\big(r\cos\theta, r\sin\theta\big) + \sin\theta\, G\big(r\cos\theta, r\sin\theta\big) \\ \theta' = \dfrac{1}{r}\Big(- \sin\theta\, F\big(r\cos\theta, r\sin\theta\big) + \cos\theta\, G\big(r\cos\theta, r\sin\theta\big)\Big) \end{cases}$$

che possiamo scrivere anche come

$$\begin{cases} r' = \big(\cos\theta, \sin\theta\big) \cdot \big(F(\Phi), G(\Phi)\big) \\ \theta' = \dfrac{1}{r}\big(- \sin\theta, \cos\theta\big) \cdot \big(F(\Phi), G(\Phi)\big) \end{cases}$$

Viceversa, se le funzioni

$$r : [0,T) \to (0,+\infty) \qquad \text{e} \qquad \theta : [0,T) \to \mathbb{R},$$

sono soluzioni del sistema

$$\begin{cases} r' = \big(\cos\theta, \sin\theta\big) \cdot \big(F(\Phi), G(\Phi)\big) \\ \theta' = \dfrac{1}{r}\big(- \sin\theta, \cos\theta\big) \cdot \big(F(\Phi), G(\Phi)\big) \end{cases},$$

allora le funzioni

$$x(t) = r(t)\cos\big(\theta(t)\big) \qquad \text{e} \qquad y(t) = r(t)\sin\big(\theta(t)\big)$$

sono soluzioni di

$$\begin{cases} x' = F(x,y) \\ y' = G(x,y). \end{cases}$$

Esercizio 5. *Considerare il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} x' = -x - y \\ y' = x - y \\ x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

dove $(x_0, y_0) \neq (0,0)$.

(i) *Scrivere il sistema in coordinate polari.*

(ii) *Trovare la soluzione in coordinate polari in funzione del dato iniziale.*

(iii) *Tracciare la traiettoria approssimativa della soluzione.*

(iv) *Mostrare che per ogni dato iniziale la soluzione* $\big(x(t), y(t)\big)$ *converge a* $(0,0)$.

Esercizio 6. *Considerare il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} x' = -y - x\big(x^2 + y^2\big) \\ y' = x - y\big(x^2 + y^2\big) \\ x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

dove $(x_0, y_0) \neq (0,0)$.

(i) *Scrivere il sistema in coordinate polari.*

(ii) *Trovare la soluzione in coordinate polari in funzione del dato iniziale.*

(iii) *Tracciare la traiettoria approssimativa della soluzione.*

(iv) *Mostrare che per ogni dato iniziale la soluzione* $\big(x(t), y(t)\big)$ *converge a* $(0,0)$.

Esercizio 7. *Considerare il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} x' = x\big(x^2 + y^2\big) - x - y \\ y' = y\big(x^2 + y^2\big) + x - y \\ x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

dove $(x_0, y_0) \neq (0,0)$.

(i) *Scrivere il sistema in coordinate polari.*

(ii) *Dire per quali valori del dato iniziale* (x_0, y_0) *la soluzione è periodica.*

(iii) *Tracciare la traiettoria approssimativa della soluzione in funzione del dato iniziale.*

Esercizio 8. *Considerare il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} x' = x\big(x^2 + y^2\big)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - y \\ y' = y\big(x^2 + y^2\big)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + x \\ x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

dove $(x_0, y_0) \neq (0,0)$.

(i) *Scrivere il sistema in coordinate polari.*

(ii) *Dire per quali valori del dato iniziale* (x_0, y_0) *la soluzione è periodica.*

(iii) *Per quali valori del dato iniziale la soluzione è limitata?*

(iv) *Tracciare la traiettoria approssimativa della soluzione in funzione del dato iniziale.*